

Resumo

As matrizes de transição estão no centro da moderna gestão do risco de crédito. Diversos modelos de cálculo de capital econômico adotam matrizes de migração de *rating* como entrada para o cálculo de perdas em uma carteira de crédito, como o CreditMetrics do RiskMetrics Group e o Credit Portfolio View da McKinsey and Company. Existem diversas metodologias utilizadas para a estimação de matrizes de migração de *ratings*, sejam analíticas, sejam baseadas em métodos de simulação de Monte Carlo, de suma importância para o cálculo de Capital Econômico e de perdas na carteira de crédito. Este artigo tem como objetivo apresentar uma metodologia que permite estimar matrizes de migração de *ratings* robustas em carteiras com baixa frequência de observações. O modelo teórico adotado baseou-se na teoria das cadeias de Markov, juntamente com aplicação de técnicas de simulação de Monte Carlo, mais conhecido como Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

Palavras-chave: Matriz de transição. Cadeias de Markov. Simulação de Monte Carlo.

Abstract

Transition matrices are at the heart of modern credit risk management. Several economic capital calculation models adopt rating migration matrices as inputs for the calculation of portfolio losses, such as RiskMetrics Group's CreditMetrics and McKinsey's Credit Portfolio View. There are several methodologies used for the estimation of migration matrices, whether analytical or based on Monte Carlo simulation methods, which are extremely important for the calculation of Economic Capital and losses in the loan portfolio. This paper aims to present a methodology that allows to estimate robust transition ratings matrices in portfolios with low frequency of observations. The theoretical model adopted was based on the theory of Markov chains, together with the application of Monte Carlo simulation techniques, best known as Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

Keywords: Transition matrix. Markov chains. Monte Carlo simulation.

Introdução

Define-se o risco de crédito como a possibilidade de ocorrência de perdas associadas ao não cumprimento pelo tomador ou contraparte de suas respectivas obrigações financeiras nos termos pactuados, à desvalorização de contrato de crédito decorrente da deterioração na classificação de risco do tomador, à redução de ganhos ou remunerações, às vantagens concedidas na renegociação e aos custos de recuperação.

O processo de gerenciamento de risco de crédito em instituições financeiras vem passando por uma evolução ao longo dos últimos anos. Os métodos de tomada de decisão tradicionais, baseados em critérios exclusivamente subjetivos, têm perdido espaço nas atividades dos bancos, que buscam instrumentos mais criteriosos, eficazes e objetivos para gerenciar suas exposições ao risco de crédito.

Um instrumento utilizado pelos bancos para monitorar o risco de suas carteiras de crédito é a matriz de migração dos *ratings*, gerada a partir de informações sobre os *ratings* de contrapartes nos sistemas de classificação de risco.

As matrizes de transição são amplamente aplicadas na moderna gestão do risco de crédito. Diversos modelos para cálculo de capital são baseados na utilização de matrizes de migração de *rating*, como o CreditMetrics da RiskMetrics Group e o Credit Portfolio View da McKinsey. Tais modelos fazem uso de ferramentas de cálculo de risco de crédito com base em estimativas de probabilidades de migração entre os *ratings*. Estimativas robustas e previsões de riscos de transição de um *rating* para outro são ingredientes importantes para a elaboração de estratégias de investimento e de empréstimos bancários, para modelos de cálculo de estimativas de perdas no portfólio (Value at Risk, Expected Shortfall, Capital Econômico) etc.

As matrizes de migração evidenciam as alterações na qualidade de crédito dos tomadores de recursos, em geral empresas, ao longo de um determinado período de tempo. As matrizes de migração possuem ampla aplicação nas atividades de gestão de riscos, como na avaliação de risco de portfólios, na modelagem da estrutura a termo do prêmio de risco de crédito e no apreçamento de derivativos de crédito (SCHUERMANN; JAFRY, 2003).

De uma forma geral, a construção de uma matriz de migração requer a seleção de um conjunto de empresas ou mutuários em uma determinada data (data inicial) e o exame da situação desses tomadores em uma segunda data (data final). A variável utilizada na comparação é a classificação de risco (*rating*). Há quatro possibilidades de migração das classificações de risco dos tomadores no período englobado pela matriz:

- o tomador se mantém na mesma classificação de risco;
- o tomador migra para uma classificação de risco melhor (*upgrade*);
- o tomador migra para uma classificação de risco pior (*downgrade*); e
- o tomador torna-se inadimplente (migra para o *default*).

Este artigo tem como objetivo apresentar uma metodologia de estimação das matrizes de transição de *ratings* em carteiras com baixa frequência de observações, característica que se aplica ao BNDES. O artigo foi estruturado da forma apontada a seguir.

A segunda seção apresenta uma digressão sobre processos estocásticos e cadeias de Markov, fazendo uma revisão sobre processos discretos e contínuos no tempo. Na terceira seção, detalha-se o processo de

modelagem de matrizes de migração para os casos discreto e contínuo, comparando-os por meio de um exemplo prático. Além disso, mostra um método alternativo à metodologia de estimação de matrizes de transição baseada em dados históricos: o método de cadeias de Markov com simulação de Monte Carlo, mais conhecido como Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Os resultados obtidos com a aplicação da metodologia MCMC são analisados na quarta seção. A quinta seção é composta pelas considerações e conclusões finais.

Modelo teórico adotado

O modelo teórico adotado no presente artigo para a estimação das matrizes de migração de *ratings* baseou-se na teoria das cadeias de Markov, juntamente com aplicação de técnicas de simulação de Monte Carlo. A seguir, será feita uma descrição de todo o ferramental teórico envolvido na elaboração deste artigo.

Processos estocásticos e cadeias de Markov

Segundo Hillier e Lieberman (2006, p. 713), um processo estocástico é definido como um conjunto indexado de variáveis aleatórias $\{X_t\}$, em que o índice t percorre um dado conjunto T . Assim, um processo estocástico é a descrição de um fenômeno aleatório que varia com o tempo. Normalmente, admite-se que T seja o conjunto de inteiros não negativos e X_t represente uma característica mensurável de interesse no instante t .

O processo estocástico X_1, X_2, X_3, \dots pode representar a coleção das quantidades de carros que passam por um determinado ponto de uma rodovia, a evolução dos níveis de estoque semanais de

uma firma, o comportamento de uma partícula de gás, variações nas qualidades dos produtos, variações nos preços de ações, vendas em uma determinada loja, evolução do número de desempregados em um determinado país, variações nas quantidades de pessoas que são atendidas ao dia por um determinado posto de serviço etc.

Os processos estocásticos podem ser classificados como:

- **Em relação ao estado:**
 - Estado discreto (cadeia): $X(t)$ é definido sobre um conjunto enumerável ou finito.
 - Estado contínuo: $X(t)$ é definido sobre um conjunto não enumerável e infinito.
- **Em relação ao tempo:**
 - Tempo discreto (estágio): t é finito ou enumerável.
 - Tempo contínuo: t é infinito e não enumerável.
- **Notação:**
 - Processo em tempo contínuo: $\{X(t), t \geq 0\}$.
 - Processo em tempo discreto: $\{X(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Cadeias de Markov em tempo discreto

A probabilidade de o processo estocástico (com tempo e estado discretos) migrar para o estado j , dado que estava no estado i , em n estágios, é chamada probabilidade de transição ($p_{ij}^{(n)}$). Além disso, tem-se que $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^m p_{ij}^{(n)} = 1$, para todo i e j , $n = 0, 1, 2, \dots$. Na notação acima, n refere-se aos estágios (discretização temporal) e m ao total de estados possíveis.

Diz-se que um processo estocástico tem a propriedade markoviana se $P\{X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = k_{t-1}, \dots, X_1 = k_1, X_0 = k_0\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$, para $t = 0, 1, \dots$ e toda sequência $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$. Em outras palavras, a propriedade markoviana diz que a probabilidade condicional de qualquer “evento” futuro é independente dos eventos passados e depende apenas do estado atual (*propriedade da falta de memória*).

Quando as probabilidades de transição de uma cadeia de Markov dependem apenas da duração do intervalo de sua ocorrência e não do momento no tempo no qual ela ocorreu, diz-se que a cadeia tem *probabilidades de transição estacionárias*. Matematicamente, $P\{X_{t+n} = j | X_t = i\} = P\{X_n = j | X_0 = i\}$.

As probabilidades de transição podem ser expressas na forma matricial, conforme mostrado a seguir:

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1m}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}^{(n)} & \cdots & p_{mm}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde:

n = estágio da transição;

m = número total de estados alcançáveis.

Supondo-se a estacionariedade das probabilidades, podem-se representar as matrizes de probabilidades em estágios mais avançados com base na multiplicação de matrizes em estágios menores, conforme mostrado a seguir:

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} P = P^{(n-2)} P^2 = P^{(n-3)} P^3 = \dots = P^{(n-k)} P^k \quad (2)$$

A expressão matricial (2) pode ser reescrita, em relação a seus elementos, da seguinte forma:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}^{(1)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(n-2)} p_{kj}^{(2)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(n-3)} p_{kj}^{(3)} = \dots = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(n-r)} p_{kj}^{(r)}, \quad (3)$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, m$ e quaisquer n e r , desde que $n > r$. A equação (3) é chamada equação de Chapman-Kolmogorov, cuja demonstração para o caso contínuo encontra-se no Apêndice B.

Cadeias de Markov em tempo contínuo

Uma cadeia de Markov em tempo contínuo é aquela que tem a variável tempo representada por instantes ou momentos do tempo (e não por períodos de tempo contáveis na forma de estágios, como ocorre nas cadeias de tempo discreto). Assim, uma cadeia de Markov em tempo contínuo é um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$, com a propriedade de a probabilidade de se estar em um estado j qualquer em um momento futuro depender apenas de um estado presente i e não dos estados visitados em qualquer momento passado. Ou seja:

$$P\{X(t+s) = j | X(s) = i \text{ e } X(r) = k\} = P\{X(t+s) = j | X(s) = i\}, \quad (4)$$

para todo $i, j, k = 1, 2, \dots, m$ e $r \geq 0, s > r$ e $t > 0$.

Note-se que a expressão anterior é uma probabilidade de transição, da mesma forma que as probabilidades de transição para cadeias de Markov de tempo discreto. A única diferença é que t agora não precisa ser um inteiro.

Supondo-se as probabilidades estacionárias no tempo (processo homogêneo no tempo), seus valores apenas dependerão da duração

do intervalo de tempo, e não do momento em que as transições ocorreram. Assim:

$$p_{ij}(t) = P\{X(t+s) = j | X(s) = i\} = P\{X(t) = j | X(0) = i\}, \quad (5)$$

para todo s e t .

Utilizando a equação de Chapman-Kolmogorov, tem-se:

$$p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(\Delta t)$$

Matricialmente, fica-se com o seguinte:

$$P(t + \Delta t) = P(t) P(\Delta t) \quad (6)$$

Calcula-se $P(t + \Delta t)$ utilizando a expansão em série de Taylor no ponto $t=0$:

$$\begin{aligned} p_{ij}(0 + \Delta t) &= p_{ij}(\Delta t) = p_{ij}(0) + p'_{ij}(0)\Delta t + p''_{ij}(0)\frac{\Delta t^2}{2!} + \dots \\ &\dots + p^{(k)}_{ij}(0)\frac{\Delta t^k}{k!} + \dots = p_{ij}(0) + p'_{ij}(0)\Delta t + \delta^2, \end{aligned}$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, m$, onde:

$\delta^2 \rightarrow 0$, quando $\Delta t \rightarrow 0$.

Tem-se que:

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \text{ e}$$

$$p'_{ij}(0) = \frac{dp_{ij}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \lambda_{ij}$$

Cada λ_{ij} é chamado de taxa de transição ou a velocidade com que o estado i vai para o estado j .

$$\text{Seja: } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mm} \end{bmatrix}$$

Fazendo o procedimento acima para cada p_{ij} da matriz P , chega-se à expressão geral a seguir:

$$P(\Delta t) = I + \Lambda(\Delta t)$$

Substituindo na equação (6), chega-se a:

$$P(t + \Delta t) = P(t)[I + \Lambda(\Delta t)]$$

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P(t)\Lambda$$

Tomando o limite em que Δt tende a zero, tem-se:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\Lambda \quad \begin{array}{l} \text{(equação de Chapman-Kolmogorov} \\ \text{para o caso contínuo)} \end{array} \quad (7)$$

Resolvendo a equação diferencial (7), obtém-se a matriz de transição $P(t)$, conforme mostrado a seguir:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \Lambda \Rightarrow \frac{dP(t)}{P(t)} = \Lambda dt \Rightarrow \int_0^t \frac{dP(t)}{P(t)} = \int_0^t \Lambda dt \Rightarrow$$

$$P(t) = \exp(\Lambda t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!}, t \geq 0 \quad (8)$$

Para evitar o cálculo da série de potências da matriz Λ , pode-se obter a matriz $P(t)$ de outra forma, verificando se Λ tem m autovalores reais distintos. Em caso positivo, graças a um teorema da álgebra linear, garante-se que ela possa ser diagonalizável e, portanto, pode-se fazer sua decomposição espectral da seguinte maneira:

$$P(t) = \exp(\Lambda t) = \exp(XDX^{-1}t) = X \exp(Dt) X^{-1}, t \geq 0 \quad (9)$$

onde:

D = matriz diagonal dos autovalores reais distintos de Λ ;

X = matriz dos autovetores linearmente independentes de Λ ;

X^{-1} = matriz inversa de X .

A matriz Λ é chamada matriz geradora da matriz de transição $P(t)$ e apresenta as seguintes propriedades:

- 1) $\lambda_{ij} \geq 0$, se $i \neq j$
- 2) $\lambda_{ii} = -\sum_{i \neq j}^m \lambda_{ij}$

A demonstração dessas propriedades encontra-se no Apêndice A.

Modelo de estimação da matriz de migração de *ratings* incondicional

Geralmente, as estimativas convencionais de matrizes de migração de *ratings*, realizadas por agências classificadoras de risco e alguns artigos na literatura acadêmica, são baseadas no modelo de cadeias de Markov em tempo discreto, considerando-se a hipótese de homogeneidade temporal. Esse método, conhecido como Cohort Method, consiste em derivar uma função de verossimilhança de m distribuições multinomiais independentes. A função de verossimilhança tem a seguinte formulação:

$$L(P) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^m p_{ij}^{N_{ij}} \quad (10)$$

O estimador de máxima verossimilhança para a probabilidade de transição é dado por:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i} \quad (11)$$

onde $N_i = \sum_{j=1}^m N_{ij}$ e

N_i = número de firmas no *rating* i no início do período;

N_{ij} = número de firmas que migraram do estado i para o estado j no fim do período;

\hat{p}_{ij} = estimativa de máxima verossimilhança da probabilidade de transição do estado i para o estado j dentro do período considerado.

Nessa abordagem, apenas é feita uma comparação dos *ratings* das empresas no início do período com as categorias de risco encon-

tradas ao fim da janela em análise, sem a preocupação de se detectar qualquer migração intermediária entre os *ratings* em períodos contidos na janela temporal de análise. Uma consequência imediata dessa modelagem é que, se uma transição do estado i (em $t = 0$) para o estado j ($t = T$) não for observada, a estimativa para a probabilidade dessa migração é zero para o período T . Um evento raro, como a transição de AAA para o *default*, só apresentará estimativa se for observado na janela de tempo estabelecida. Isto é, não se leva em consideração o que aconteceu durante o período T , mas sim só o que se observou nos extremos do período.

Como correção do problema descrito no parágrafo anterior, existe uma modelagem do processo de Markov em tempo contínuo com homogeneidade temporal (probabilidades estacionárias no tempo), descrita em Lando e Skodeberg (2002), que leva em consideração as migrações entre os *ratings* em períodos intermediários dentro da janela temporal a ser considerada. No processo de obtenção de uma matriz geradora, a estimativa de máxima verossimilhança é facilmente calculada se observações contínuas sobre cada mutuário $X = \{x(t) \mid 0 \leq t \leq T\}$ estão disponíveis. Assumindo-se que uma probabilidade do estado inicial é conhecida, a função de verossimilhança pode ser expressa como:

$$L(\Lambda) = \prod_{i=1}^m \prod_{j \neq i} (\lambda_{ij})^{N_{ij}(T)} \exp\left(-\lambda_{ij} R_i(T)\right) \quad (12)$$

A função de log-verossimilhança é, portanto:

$$\log(L(\Lambda)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i} \log(\lambda_{ij}) N_{ij}(T) - \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} R_i(T) \quad (13)$$

Logo, o estimador de máxima verossimilhança para as intensidades de transição é dado por:

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{N_{ij}(T)}{R_i(T)}, \text{ sujeito a:} \quad (14)$$

$$\hat{\lambda}_{ij} \geq 0 \text{ para } i \neq j$$

$$\hat{\lambda}_{ii} = -\sum_{i \neq j} \hat{\lambda}_{ij}$$

onde: $R_i(T) = \int_0^T R_i(s) ds$

$N_{ij}(t)$ = número total de transições do estado i para o estado j ao longo do período $[0, T]$;

$\hat{\lambda}_{ij}$ = estimativa de máxima verossimilhança da intensidade de transição entre o estado i e o estado j dentro do período considerado;

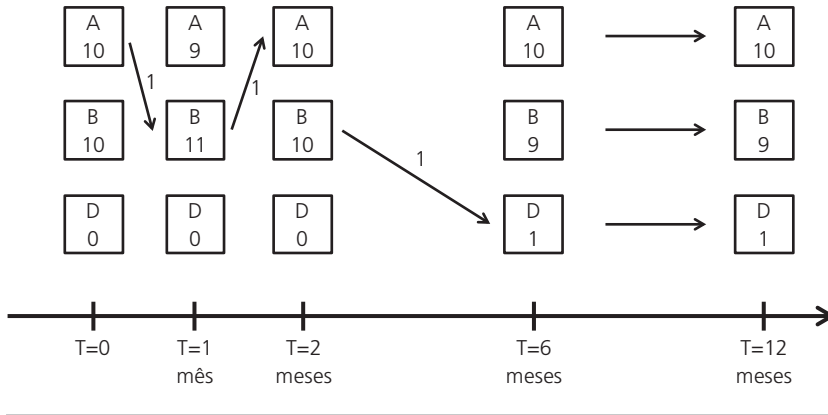
$R_i(s)$ = número de empresas de *rating* i no instante s .

De posse de todas as estimativas das intensidades de migração, a matriz $\hat{\Lambda}$ das intensidades é construída. Deve-se observar que a última linha dessa matriz se refere à linha do *default*, que receberá o valor 0 (zero) para todos seus elementos, pois o *default* é considerado um estado absorvente.¹ A partir daí, a matriz de probabilidades de transição \hat{P} é construída aplicando-se a equação (9).

Para ilustrar os modelos citados, segue um exemplo prático. Suponha-se um sistema com duas categorias de *rating*, A e B, além do *default* D. Observam-se vinte empresas no período de um ano, dez iniciando em A e dez em B. Suponha-se que as migrações ocorram conforme ilustra a Figura 1.

¹ Diz-se que um estado é absorvente se, uma vez atingido, o processo *jamais* deixar esse estado novamente. Portanto, o estado i é um estado absorvente se e somente se $\hat{p}_{ii} = 1$.

Figura 1 • Migrações entre os *ratings* na janela de um ano – caso contínuo



Fonte: Elaboração própria, com base em Lando e Skodeberg (2002).

A Figura 1 mostra uma situação em que uma empresa A mudou seu *rating* para B após um mês, uma empresa B melhorou seu *rating* para A após dois meses e outra empresa B faliu após seis meses.

Para o caso contínuo, calculam-se os elementos da matriz geradora a ser estimada:

$$\hat{\lambda}_{AB} = \frac{N_{AB} = 1}{\int_0^1 R_A(s) ds = \left(\frac{1}{12} 10 + \frac{1}{12} 9 + \frac{10}{12} 10 \right) = \frac{119}{12}} = 0.10084$$

$$\hat{\lambda}_{AD} = \frac{N_{AD} = 0}{\int_0^1 R_A(s) ds = \left(\frac{1}{12} 10 + \frac{1}{12} 9 + \frac{10}{12} 10 \right) = \frac{119}{12}} = 0$$

$$\hat{\lambda}_{AA} = -\hat{\lambda}_{AB} - \hat{\lambda}_{AD} = -0.10084$$

$$\hat{\lambda}_{BA} = \frac{N_{BA} = 1}{\int_0^1 R_B(s) ds = \left(\frac{1}{12} 10 + \frac{1}{12} 11 + \frac{4}{12} 10 + \frac{6}{12} 9 \right) = \frac{115}{12}} = 0.10435$$

$$\hat{\lambda}_{BD} = \frac{N_{BD} = 1}{\int_0^1 R_B(s) ds = \left(\frac{1}{12} 10 + \frac{1}{12} 11 + \frac{4}{12} 10 + \frac{6}{12} 9 \right) = \frac{115}{12}} = 0.10435$$

$$\hat{\lambda}_{BB} = -\hat{\lambda}_{BA} - \hat{\lambda}_{BD} = -0.20870$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} -0.10084 & 0.10084 & 0 \\ 0.10435 & -0.20870 & 0.10435 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base na equação (9), tem-se que a estimativa para um ano é:

$$\hat{P}(1) = \exp(\hat{\Lambda}) = X \exp(D) X^{-1}$$

Para calcular os autovalores de $\hat{\Lambda}$, deve-se resolver a equação a seguir:

$$\hat{\Lambda} v_i = \lambda_i v_i \Rightarrow (\hat{\Lambda} - \lambda_i I) v_i = 0, \text{ onde } i = 1, 2 \text{ e } 3.$$

$$X = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$XX^{-1} = I \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Calculando-se os autovalores e depois, os autovetores, encontra-se:

$$\lambda_1 = -0.27066; \lambda_2 = -0.03888; \lambda_3 = 0;$$

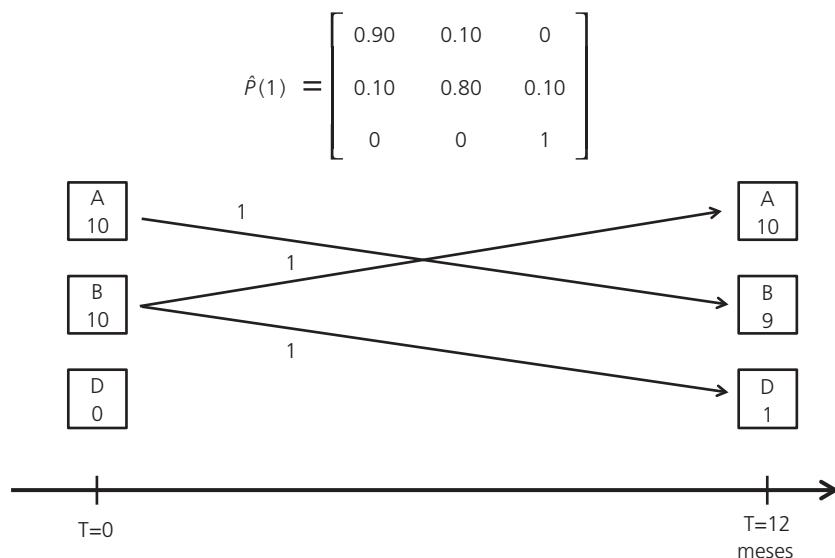
$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.51057 \\ -0.85984 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0.85201 \\ 0.52353 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}(1) = \begin{bmatrix} 0.51057 & 0.85201 & 0.57735 \\ -0.85984 & 0.52353 & 0.57735 \\ 0 & 0 & 0.57735 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-0.27066) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-0.03888) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.52359 & -0.85211 & 0.32852 \\ 0.85994 & 0.51063 & -1.37056 \\ 0 & 0 & 1.73205 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.90867 & 0.08657 & 0.00475 \\ 0.08959 & 0.81607 & 0.09434 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tendo como base o exemplo dado anterior, a Figura 2 ilustra a estimativa de probabilidades de migração pelo método discreto, de maneira que pode-se observar claramente a diferença das estimativas de probabilidades com relação à metodologia de cálculo pelo método contínuo.

Figura 2 • Migrações entre os ratings na janela de um ano – caso discreto



Fonte: Elaboração própria, com base Lando e Skodeberg (2002).

Do exemplo anterior, podem-se observar algumas vantagens da estimativa no espaço contínuo, como:

- é possível obter matrizes de transição para qualquer horizonte de tempo;
- é possível estimar probabilidades de migração para eventos raros, não capturados pela observação empírica;
- é possível capturar probabilidades de migração para estados que podem não existir no início do período, mas que passam a existir em algum momento, em razão das migrações;
- é possível condicionar as intensidades de migração (*hazard rates*) (ver Apêndice C).

No entanto, existem alguns problemas observados com a estimação em tempo contínuo, a saber:

- Partindo de uma matriz de probabilidades de migração empírica, nem sempre é possível encontrar uma matriz geradora válida. Pode não existir uma única matriz ou ela pode conter autovalores complexos ou, ainda, ela pode violar as restrições da equação (14). Na literatura, essa questão é chamada *embeddability problem* e há propostas de tratamento em Israel, Rosenthal e Wei (2001). Tais autores afirmam que a matriz geradora é única se $p_{ii} > 0.5$, para todo $i = 1, \dots, m$ e que não existe matriz geradora exata para P se, pelo menos, uma das condições a seguir for verdadeira:

- 1) $\det(P) \leq 0$;

- 2) $\det(P) > \prod_{i=1}^m p_{ii}$;

- 3) existem estados i, j tais que j é acessível de i , mas $p_{ij} = 0$.

- Partindo da estimação direta da matriz geradora, há a escassez de observações que torna menos robusta qualquer estimação estatística conforme o aumento do número de dimensões.
- Independentemente de a matriz geradora empírica ser robusta, ela também pode ter autovalores complexos.
- A matriz empírica dificilmente terá propriedades desejadas como a monotonicidade ao longo da escala de *ratings*. A monotonicidade de uma matriz de transição não se refere somente à curva crescente de *default* ou à monotonicidade de linha, mas às probabilidades acumuladas crescentes para cada estado. Ou seja, as probabilidades concentram-se na diagonal principal e nas proximidades dela, mostrando que um estado, na maior parte do tempo, mantém-se em seu estado original ou migra para estados mais próximos. Além disso, espera-se que a soma das probabilidades de *downgrades* de um *rating*

AAA para *ratings* piores seja inferior à soma das probabilidades de *downgrades* de um *rating* AA para os mesmos *ratings*, por exemplo. A mesma lógica vale para o caso de *ratings* ruins sofrendo *upgrades*. Na Figura 3, segue uma matriz de transição hipotética com as propriedades desejáveis de monotonicidade e outra com as propriedades indesejáveis. Por exemplo, considerando as probabilidades de *downgrade* para os *ratings* BB ou inferior dos estados AA e A, tem-se:

Figura 3 • Matrizes de migração hipotéticas monotônicas e não monotônicas

Matriz monotônica

	AA	A	BB	B	C	Default
AA	75,5%	15,0%	6,0%	2,0%	1,0%	0,5%
A	10,0%	78,5%	5,0%	3,0%	2,0%	1,5%
BB	3,0%	9,0%	64,0%	12,0%	7,0%	5,0%
B	1,0%	6,0%	18,0%	50,0%	15,0%	10,0%
C	0,0%	2,0%	8,0%	12,0%	63,0%	15,0%
Default	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%

$P_{AA \leq BB} = 9,5\%$
 $P_{A \leq BB} = 11,5\%$

Matriz não monotônica

	AA	A	BB	B	C	Default
AA	67,5%	20,0%	9,0%	2,0%	1,0%	0,5%
A	10,0%	78,5%	5,0%	3,0%	2,0%	1,5%
BB	3,0%	9,0%	64,0%	12,0%	7,0%	5,0%
B	1,0%	6,0%	18,0%	50,0%	15,0%	10,0%
C	0,0%	2,0%	8,0%	12,0%	63,0%	15,0%
Default	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%

$P_{AA \leq BB} = 12,5\%$
 $P_{A \leq BB} = 11,5\%$

Fonte: Elaboração própria.

Para tentar resolver o problema da falta de robustez das estimativas, provocada pela escassez de massa de dados de migrações disponíveis para todos os *ratings*, utiliza-se o modelo de estimação das cadeias de Markov por simulação de Monte Carlo, que será descrito nos próximos parágrafos.

Dados utilizados

Foi gerada uma série histórica com dados fictícios, a partir de características da carteira do BNDES, como o perfil de risco da carteira e poucos anos de observação. Essa série constitui um total de 144 meses como entrada da estimação. Cabe aqui frisar que, apesar de a série testada não refletir a realidade do BNDES, foi mantida a mesma escala de *ratings* interna do BNDES no processo de estimação.

Tabela 1 • Escalas de classificação de risco do BNDES

CR	Ordem
AAA	1
AA+	2
AA	3
AA-	4
A+	5
A	6
A-	7
BBB+	8
BBB	9
BBB-	10
BB+	11
BB	12
BB-	13
B+	14
B	15
B-	16
CCC+	17
CCC	18
CCC-	19
CC	20
C	21
D	22
E	23
F	24
X	25

Fonte: Elaboração própria.

Nota: A categoria X refere-se ao estado absorvente de *default*.

Modelo Markov Chain Monte Carlo Estimation (MCMC)

O método consiste em aproximar a distribuição *a posteriori* (*posterior distribution*) por parâmetros θ ou variáveis latentes² Y , dadas observações X , mediante amostras obtidas pela geração de uma sequência de cadeias de Markov $\{\theta^{(g)}, Y^{(g)}\}_{g=1}^G$ a partir da distribuição $\mathcal{O}(\theta, Y|X)$. É possível estimar as variáveis de interesse sumarizando as estatísticas dessas amostras simuladas. Por exemplo, a estimativa da média *a posteriori* de $f(\theta, Y)$, definida por

$$E[f(\theta, Y)|X] = \iint f(\theta, Y) \mathcal{O}(\theta, Y|X) d\theta dY \quad (15)$$

é dada por

$$\frac{1}{G} \sum_{g=1}^G f(\theta^{(g)}, Y^{(g)}). \quad (16)$$

Usando a regra de Bayes, pode-se fatorar a distribuição *a posteriori* da seguinte forma:

$$\mathcal{O}(\theta, Y|X) \propto \mathcal{O}(X|\theta, Y) \mathcal{O}(Y|\theta) \mathcal{O}(\theta),$$

onde $\mathcal{O}(\theta)$ é a distribuição *a priori* (*prior distribution*). A distribuição inicial permite impor certas restrições estatísticas na inferência dos parâmetros da distribuição *a posteriori*. Isso significa que, no contexto da estimativa da matriz geradora, condições de positividade podem ser impostas aos λ_{ij} pela escolha apropriada da $\mathcal{O}(\Lambda)$.

² Variável que não pode ser medida diretamente.

Para a estimação, as questões-chave são a escolha da distribuição inicial (*prior distribution*) $\varnothing(\Lambda)$ e o método usado na geração da sequência $\{\Lambda^{(g)}, Y^{(g)}\}_{g=1}^G$ para a distribuição conjunta *a posteriori* condicionada às observações $X = x$. Bladt e Sorensen (2009) propuseram a amostragem de Gibbs³ para a geração da sequência. Esse processo de amostragem gera uma sequência $\{\Lambda^{(g)}, Y^{(g)}\}_{g=1}^G$ que converge para $\varnothing(\Lambda, Y|X = x)$. Para a escolha da distribuição *a priori* $\varnothing(\Lambda)$, Bladt e Sorensen (2009) sugerem a distribuição *gama* dada por:

$$\varnothing(\Lambda) \propto \prod_{i=1}^m \prod_{j \neq i} (\lambda_{ij})^{\left(\alpha_{ij} - 1\right)} \exp\left(-\lambda_{ij} \beta_i\right), \quad (17)$$

onde $\alpha_{ij} > 0$ e $\beta_i > 0, i, j = 1, 2, \dots, m$.

Portanto, tem-se que $\lambda_{ij} \sim \Gamma(\alpha_{ij}, \beta_i)$, com média e variância dadas por $\frac{\alpha_{ij}}{\beta_i}$ e $\frac{\alpha_{ij}}{\beta_i^2}$, respectivamente. Dada a função de verossimilhança para os dados observados nos moldes da equação (12), a distribuição *a posteriori* de Λ é dada por:

$$\begin{aligned} \varnothing(\Lambda|Y, x) &= \varnothing(\Lambda|Y) \propto \varnothing(\Lambda) \varnothing(Y|\Lambda) \propto \\ &\propto \prod_{i=1}^m \prod_{j \neq i} (\lambda_{ij})^{\left(N_{ij}(T) + \alpha_{ij} - 1\right)} \exp\left(-\lambda_{ij} (R_i(T) + \beta_i)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

³ Em matemática e física, a amostragem de Gibbs ou amostrador de Gibbs é um algoritmo para gerar uma sequência de amostras da distribuição conjunta de probabilidades de duas ou mais variáveis aleatórias. O propósito de tal sequência é aproximar a distribuição conjunta, ou computar uma integral (tal como um valor esperado). A amostragem de Gibbs é um caso especial do algoritmo de Metropolis-Hastings e, então, um exemplo de um algoritmo Markov Chain Monte Carlo. O algoritmo recebe o nome do físico J. W. Gibbs, em referência a uma analogia entre o algoritmo de amostragem e a física estatística.

Bladt e Sorensen (2009) descrevem o passo a passo dos processos da modelagem do Markov Chain Monte Carlo Estimation (MCMC):

- 1) Construir Λ inicial supondo que $\lambda_{ij} \sim \Gamma(\alpha_{ij}, \beta_i)$, para $i \neq j$.
- 2) Simular uma cadeia de Markov de tempo contínuo $X(t)$ com a matriz geradora Λ , tal que todas as observações de cada intervalo Δt são realizadas. Repetir essa simulação até o tempo final T .
- 3) Calcular as $\hat{N}_{ij}(T)$ e $\hat{R}_i(T)$ estatísticas das amostras aceitas no passo 2.
- 4) Construir uma nova matriz Λ supondo agora que $\lambda_{ij} \sim \Gamma\left(\left(\hat{N}_{ij}(T) + \alpha_{ij}\right), \left(\hat{R}_i(T) + \beta_i\right)\right)$, para $i \neq j$.
- 5) Repetir os passos 2, 3 e 4 G vezes. Produzir as estatísticas de interesse para $\left\{\lambda_{ij}^{(g)}\right\}_{g=1}^G$.

Metodologia de estimação

Encontram-se a seguir as etapas do processo de estimação da matriz de migração de *ratings* incondicional, baseadas no modelo MCMC, acrescentando-se algumas informações específicas relacionadas à obtenção da matriz geradora Λ . De uma forma geral, o modelo de simulação adotado segue as etapas descritas na subseção anterior, com algumas peculiaridades e pequenas alterações que serão detalhadas. Segue o passo a passo da estimação:

- 1) A primeira etapa consiste em coletar os dados históricos das migrações entre os *ratings*. A partir daí, é possível determinar os $\hat{N}_{ij}(T)$ e $\hat{R}_i(T)$, onde T se refere à janela de tempo disponível na base de dados. De posse dessas estimativas, é possível calcular os

$\hat{\lambda}_{ij}(T)$ por meio da equação (14). A partir das estimativas das taxas de migração, parametriza-se uma distribuição *gama* teórica *a priori* (*prior distribution*) que mais se ajusta à distribuição dos $\hat{\lambda}_{ij}(T)$ estimados. O processo de ajuste da distribuição *a priori* aos dados observados consiste em determinar os parâmetros α_{ij} e β_i que minimizam a soma dos quadrados dos desvios dos $\hat{\lambda}_{ij}$ estimados por (14) com os λ_{ij} gerados pela distribuição *gama* teórica que será calibrada. Utiliza-se um modelo de otimização *não linear* para tal. Essa distribuição inicial servirá de base para condicionar o processo de geração de novas amostras de migração por meio da simulação de Monte Carlo.

2) Tendo como base a distribuição *gama a priori* calibrada e otimizada, é realizada a simulação do processo de Markov em tempo contínuo, no qual as trajetórias relacionadas às migrações dos *ratings* são geradas. A simulação é realizada para cem contrapartes para cada um dos 24 *ratings* em 12 passos, em que cada passo refere-se a um mês. Portanto, as migrações são simuladas 12 meses à frente, mês a mês. Logo, o total de iterações realizadas por simulação é de 28.800.

3) Os novos dados das migrações gerados pela simulação são adicionados aos dados históricos existentes na base, o que permite uma re-estimação dos $\hat{N}_{ij}(T)$ e $\hat{R}_i(T)$ e, como consequência, dos $\hat{\lambda}_{ij}(T)$, sendo que, agora, é calibrada uma nova distribuição *gama a posteriori*, com equação da forma descrita no passo 4 do método MCMC detalhado na subseção “Modelo Markov Chain Monte Carlo Estimation (MCMC)”. O método de re-estimação da *gama a posteriori* segue a mesma lógica descrita na parametrização da distribuição *a priori*.

4) Repetem-se os passos 2 e 3 dez mil vezes. Observa-se que, a cada simulação, aumenta-se a massa de dados, e, conseqüentemente, as estimativas vão ficando cada vez mais robustas. Todos os dados referentes às migrações, como os $\hat{N}_{ij}(T)$, $\hat{R}_i(T)$ e $\hat{\lambda}_{ij}(T)$, bem como os dados das distribuições *gama a posteriori* calibradas, são armazenados em bases de dados intermediárias.

5) Depois de realizadas as simulações e armazenados todos os dados de cada iteração, é realizado um teste que verifica em quais intervalos da simulação os dados armazenados produzem matrizes geradoras com autovalores reais e com maiores níveis de monotonicidade.⁴ Ou seja, escolhe-se qual intervalo de dados simulados produzirá uma matriz geradora que não apresente autovalores complexos em sua decomposição espectral e, ao mesmo tempo, que irá gerar uma matriz de transição com maiores taxas de monotonicidade. As taxas ou índices de monotonicidade são métricas criadas para auxiliar na verificação da monotonicidade *rating a rating*, bem como da monotonicidade linha a linha, conforme descrito e exemplificado na seção “Modelo de estimação da matriz de migração de *ratings* incondicional”. A regra básica, portanto, seria a de escolher a banda (limite inferior e superior das iterações, sendo o limite inferior superior a um determinado número de iterações iniciais, escolhido como o *burn-in period*) com dados simulados que permitirão a geração das estimativas de $\hat{N}_{ij}(T)$ e $\hat{R}_i(T)$ e $\hat{\lambda}_{ij}(T)$ que produzam uma matriz gera-

4 Os intervalos da simulação são bandas formadas por limites inferiores e superiores, representando um subconjunto do total de dados produzidos pelas dez mil simulações. Os limites inferiores e superiores são gerados aleatoriamente. Por exemplo, se os limites inferior e superior forem, respectivamente, oito mil e nove mil, serão considerados para estimação da matriz geradora apenas os dados simulados nesse subconjunto, lembrando-se que para a estimação dos parâmetros da distribuição *gama a posteriori*, são considerados todos os dados gerados até a simulação atual.

dora bem-comportada, isto é, que possa ser decomposta conforme a equação a seguir:

$$\Lambda = XDX^{-1} \quad (19)$$

onde:

D = matriz diagonal dos autovalores reais distintos de Λ ;

X = matriz dos autovetores linearmente independentes de Λ ;

X^{-1} = matriz inversa de X .

Além disso, a matriz de transição, fruto dessa matriz geradora, deve apresentar as maiores taxas de monotonicidade.⁵

6) Depois de escolher o melhor intervalo da simulação e a posterior obtenção da matriz geradora por meio da expressão (19), a matriz de migração é finalmente obtida pela equação (9).

Análise dos resultados obtidos

Com base na metodologia apresentada nas seções anteriores, a Tabela 2 mostra a matriz de migração estimada para 12 meses, de acordo com a metodologia MCMC.

⁵ Em relação à regra de escolha do melhor intervalo de simulação, se existirem duas bandas de dados que geram matrizes Λ que atendam igualmente aos requisitos de monotonicidade e de autovalores reais, opta-se pela banda mais próxima da última iteração da simulação (dez mil), visto que essa banda apresenta maior quantidade de dados na estimação dos parâmetros da distribuição *gama a posteriori*, o que contribui teoricamente para uma estimação mais robusta da matriz geradora.

Tabela 2 • Matriz de transição incondicional (%)

	AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-
AAA	89,290	6,180	2,520	1,150	0,560	0,200	0,050
AA+	15,620	70,610	8,550	3,270	1,210	0,480	0,140
AA	1,070	5,930	72,250	9,170	6,590	3,010	1,110
AA-	0,640	3,130	6,330	71,240	6,960	5,100	3,330
A+	0,670	3,250	5,950	6,970	69,809	5,790	3,410
A	0,030	0,180	0,600	2,320	5,650	68,818	7,540
A-	0,030	0,170	0,330	1,930	5,990	8,960	66,798
BBB+	0,000	0,020	0,050	0,190	1,120	3,920	8,340
BBB	0,000	0,000	0,010	0,030	0,130	0,570	2,210
BBB-	0,000	0,000	0,000	0,030	0,120	0,490	2,030
BB+	0,000	0,000	0,000	0,010	0,030	0,090	0,510
BB	0,000	0,000	0,000	0,000	0,010	0,040	0,150
BB-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,010	0,030	0,120
B+	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,010	0,040
B	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,010
B-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,010
CCC+	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
CCC	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
CCC-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,010
CC	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,010
C	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
D	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
E	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
F	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Default	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

(continua)

(continuação)

	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-
AAA	0,030	0,010	0,010	0,000	0,000	0,000
AA+	0,070	0,030	0,010	0,010	0,000	0,000
AA	0,520	0,190	0,090	0,040	0,020	0,010
AA-	1,630	0,940	0,430	0,140	0,070	0,030
A+	2,020	1,090	0,510	0,320	0,100	0,050
A	6,750	4,120	2,030	1,040	0,480	0,200
A-	7,190	4,390	2,090	1,130	0,510	0,220
BBB+	63,981	9,380	6,310	3,380	1,670	0,760
BBB	5,840	61,276	8,890	8,550	5,590	3,270
BBB-	5,140	7,670	57,795	8,770	7,150	4,510
BB+	1,720	3,970	6,450	54,874	7,960	7,750
BB	0,820	2,230	4,530	7,260	53,998	8,360
BB-	0,620	1,880	3,580	5,690	7,200	51,607
B+	0,140	0,480	1,570	2,890	4,950	6,920
B	0,060	0,160	0,540	1,270	2,510	4,640
B-	0,030	0,090	0,260	0,720	1,460	2,710
CCC+	0,010	0,030	0,120	0,240	0,520	1,100
CCC	0,010	0,020	0,110	0,210	0,430	0,910
CCC-	0,030	0,070	0,420	0,570	0,900	1,310
CC	0,030	0,070	0,450	0,620	0,990	1,310
C	0,020	0,050	0,150	0,640	1,020	1,230
D	0,010	0,040	0,120	0,230	0,980	1,240
E	0,010	0,020	0,100	0,190	0,360	1,040
F	0,010	0,020	0,080	0,160	0,330	0,530
Default	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

(continua)

(continuação)

	B+	B	B-	CCC+	CCC	CCC-
AAA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA+	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA-	0,020	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000
A+	0,030	0,020	0,010	0,000	0,000	0,000
A	0,110	0,060	0,030	0,020	0,010	0,010
A-	0,110	0,070	0,040	0,020	0,010	0,010
BBB+	0,360	0,220	0,120	0,070	0,040	0,030
BBB	1,510	0,880	0,460	0,280	0,180	0,110
BBB-	2,630	1,480	0,840	0,440	0,300	0,200
BB+	5,690	4,030	2,400	1,510	0,980	0,640
BB	6,880	5,340	3,630	2,230	1,460	0,930
BB-	7,240	6,340	4,760	3,290	2,410	1,610
B+	47,038	7,640	7,020	5,860	4,250	3,180
B	6,150	44,800	7,310	7,250	6,330	5,110
B-	4,560	6,160	42,589	7,260	7,260	6,370
CCC+	2,230	3,900	5,340	40,700	7,190	7,500
CCC	1,650	2,850	4,140	5,440	39,612	7,510
CCC-	1,810	2,380	3,120	4,300	5,440	39,279
CC	1,850	2,200	2,810	3,440	4,430	5,400
C	1,670	2,160	2,650	3,160	4,060	5,090
D	1,650	2,080	2,490	3,160	3,940	4,580
E	1,490	1,930	2,440	3,100	3,920	5,120
F	1,500	1,920	2,480	2,880	3,790	4,830
Default	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

(continua)

(continuação)

	CC	C	D	E	F	Default
AAA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA+	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
A+	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001
A	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002
A-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002
BBB+	0,010	0,010	0,010	0,000	0,000	0,009
BBB	0,070	0,040	0,030	0,020	0,010	0,044
BBB-	0,120	0,080	0,050	0,040	0,030	0,085
BB+	0,380	0,280	0,200	0,140	0,100	0,286
BB	0,610	0,420	0,310	0,210	0,160	0,422
BB-	1,060	0,740	0,510	0,370	0,290	0,643
B+	1,940	1,460	1,070	0,720	0,570	2,252
B	3,590	2,660	1,910	1,350	1,070	3,280
B-	5,100	4,100	3,070	2,180	1,700	4,371
CCC+	7,060	5,930	5,270	3,880	3,040	5,940
CCC	7,190	7,050	6,450	5,040	4,130	7,248
CCC-	7,110	6,950	6,980	5,730	4,950	8,641
CC	37,260	7,170	7,520	6,760	6,930	10,750
C	5,940	37,356	7,750	6,920	7,200	12,934
D	5,700	6,340	38,114	7,620	6,990	14,716
E	6,090	7,240	7,940	33,294	8,640	17,076
F	6,080	7,300	8,640	8,760	32,841	17,849
Default	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	100,000

Fonte: Elaboração própria.

Analisando-se os valores das probabilidades de migração estimadas pelo método descrito neste artigo, pode-se verificar o atendimento com alta precisão às principais propriedades desejáveis em uma matriz de transição bem-comportada, que seriam:

- a monotonicidade por linha *rating* a *rating*, isto é, as probabilidades concentram-se na diagonal principal e nas proximidades dela, mostrando que um estado, na maior parte do tempo, mantém-se em seu estado original ou migra para estados mais próximos;
- curva crescente de probabilidade de *default* (PD), conforme se pode observar na última coluna da matriz;
- probabilidades acumuladas crescentes para cada estado. Por exemplo, espera-se que a soma das probabilidades de *downgrades* de um *rating* AAA para *ratings* piores seja inferior à de um *rating* AA+. A mesma lógica deve ser observada para o caso dos *upgrades* acumulados. No Apêndice E encontra-se uma tabela ilustrando tal propriedade sendo atendida.

A seguir, a Tabela 3 e o Gráfico 1 comparam as probabilidades de *default* estimadas pelo modelo MCMC com as frequências de *default* observadas.⁶

Tabela 3 • PD Matriz de transição incondicional vs frequência histórica de *default* (%)

<i>Rating</i>	PD matriz de transição	Taxa de <i>default</i> observada
AAA	0,000	0,000
AA+	0,000	0,000

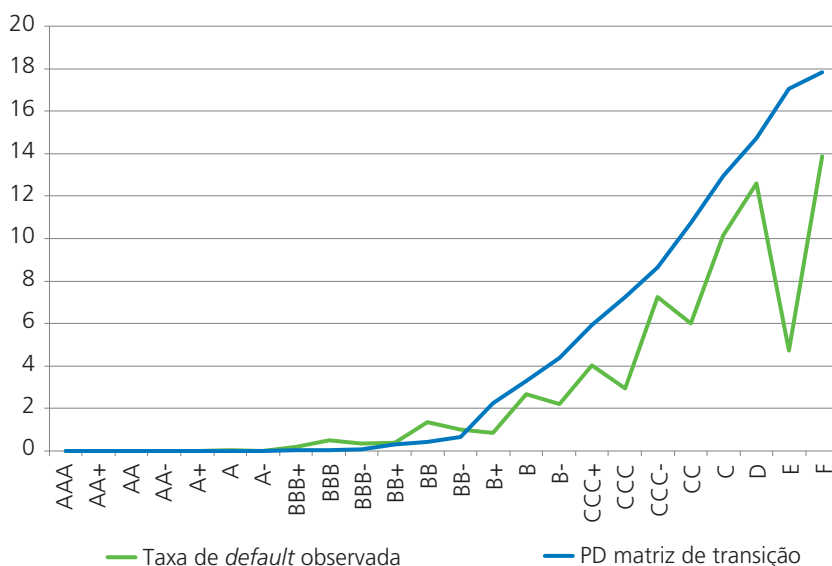
(continua)

⁶ As frequências de *default* observadas, também chamadas de frequências históricas de *default*, são as taxas de *default* que foram observadas em cada *rating*, dada a série histórica fictícia utilizada na estimação da matriz.

(continuação)

Rating	PD matriz de transição	Taxa de <i>default</i> observada
AA	0,000	0,000
AA-	0,000	0,000
A+	0,001	0,000
A	0,002	0,025
A-	0,002	0,000
BBB+	0,009	0,185
BBB	0,044	0,509
BBB-	0,085	0,348
BB+	0,286	0,379
BB	0,422	1,346
BB-	0,643	1,012
B+	2,252	0,840
B	3,280	2,651
B-	4,371	2,191
CCC+	5,940	4,028
CCC	7,248	2,935
CCC-	8,641	7,227
CC	10,750	5,988
C	12,934	10,170
D	14,716	12,616
E	17,076	4,722
F	17,849	13,867

Fonte: Elaboração própria.

Gráfico 1 • PD Matriz de transição incondicional vs frequência de *default* (%)

Fonte: Elaboração própria.

A série gerada artificialmente para estimação da matriz demonstra um comportamento volátil nas frequências de *default*, fruto de uma série com poucas observações, se comparada às bases de agências de classificação de risco, que têm registro de décadas de observação. Dessa forma, a série de frequência observada descreve uma curva não monotônica. As probabilidades de *default* geradas pelo método MCMC formam uma curva mais “suave” e monotônica, fruto do processo de simulação que gera massa de dados que complementam os existentes na base original, contribuindo para uma estimativa mais robusta.

Outro ponto relevante a se considerar é o fato de a metodologia MCMC representar uma alternativa para a estimação de probabilidades de *default* a termo, bastando apenas obter a matriz geradora e

aplicar a equação (9), gerando probabilidades para 12, 24, 36, ..., n meses, dependendo do valor de t na equação.

Conclusões

As matrizes de transição estão no centro da moderna gestão de risco de crédito, sendo aplicadas em diversos modelos de cálculo de capital econômico e de perdas. Sua estimação é considerada, portanto, imprescindível para o uso de modelos estruturais ou “Merton-based” de estimação de perdas. O modelo de estimação de *matrizes de migração* apresentado foi baseado no processo estocástico das cadeias de Markov em tempo contínuo, considerando a hipótese de estacionariedade no tempo, utilizando a simulação de Monte Carlo para a produção de massa de dados que são adicionados à série histórica original, gerada artificialmente. O método MCMC é normalmente usado em problemas de alta complexidade, por lidar com a difícil parametrização de matrizes de ordem elevada. Graças a esse processo recursivo de geração de dados das migrações, que servirá de base para a geração da *posterior distribution*, tendo como base a *prior distribution* dos dados históricos observados, garante-se, a cada iteração desse processo, um aumento da robustez das estimativas da matriz geradora. O grande problema é o possível surgimento de matrizes geradoras com autovalores complexos ou de matrizes de migração não monotônicas, o que levou aos procedimentos descritos na subseção “Metodologia de estimação”.

Os resultados apontaram para a geração de uma matriz bem-comportada, com as propriedades de monotonicidade por linha *rating* a *rating*, probabilidades acumuladas crescentes para

cada estado e curva crescente de *default* satisfeitas. Além disso, o método pode ser utilizado como ferramenta para o cálculo de probabilidades de *default a termo*, com uma operação simples de exponenciação matricial.

Relaxando a hipótese da estacionariedade, as probabilidades de migração dependem não só da duração do intervalo de tempo da migração, como também do momento no tempo no qual as migrações ocorrem. Por isso, surge a necessidade de se estimarem as matrizes de migração condicionais, dependentes, por exemplo, de flutuações do ciclo econômico. Diversas variáveis macroeconômicas e de mercado podem ter efeito nas variações temporais das probabilidades de migração e de *default*, por exemplo: crescimento do produto interno bruto (PIB), índice de produção industrial, índice de inflação, taxa de juros, índice de bolsa, volatilidade do índice de bolsa, *spreads* de risco no mercado de crédito, taxa de desemprego, utilização da capacidade instalada etc. Nickell, Perraudin e Varotto (2000) classificam a amostra de dados em três categorias em função do PIB: “pico”, “normal” e “vale”; além de investigar diferenças por setor e região. A principal conclusão é que o ciclo econômico afeta as migrações e probabilidades de *default*, em especial as classificações mais baixas. Para as mais altas, o efeito é de aumento nas volatilidades.

Nesse sentido, o desenvolvimento de um modelo satélite que possa traduzir as expectativas macroeconômicas na estimação de uma matriz de migração condicional surge como principal aprimoramento do modelo apresentado. Matrizes de migração condicionadas ao ciclo econômico podem ter um papel central na aplicação de testes de estresse para risco de crédito ou no contexto das normas IFRS 9 do International Financial Reporting Standards (IFRS).

Referências

- BLADT, M.; SORENSEN, M. Efficient estimation of transition rates between credit ratings from observations as discrete time points. *Quantitative Finance*, v. 9, issue 2, p. 147-160, 2009.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introdução à pesquisa operacional*. 8 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
- ISRAEL, R. B.; ROSENTHAL, J. S.; WEI, J. Z. Finding generators for Markov Chains via empirical transition matrices, with applications to credit ratings. *Mathematical Finance*, n. 11, p. 245-265, 2001.
- LANDO, D.; SKODEBERG, T. M. Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations. *Journal of Banking and Finance*, v. 26, p. 423, 2002.
- NICKELL, P.; PERRAUDIN, W.; VAROTTO, S. Stability of rating transitions. *Journal of Banking & Finance*, v. 24, (1/2), p. 205-229, 2000.
- NORRIS, J. R. *Markov chains*. Cambridge University Press, 1998.
- SCHUERMANN, T.; JAFRY, Y. *Measurement and estimation of credit migration matrices*. Wharton Financial Institutions Center, 2003, p. 3-9. (Working Paper)

Apêndice A – Prova das propriedades da matriz geradora Λ

Supondo-se as probabilidades estacionárias no tempo:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(0 + \Delta t) - p_{ij}(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \geq 0, i \neq j,$$

pois as probabilidades são números não negativos.

$$\lambda_{ii}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(t + \Delta t) - p_{ii}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(0 + \Delta t) - p_{ii}(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \sum_{i \neq j} p_{ij}(\Delta t) - 1\right]}{\Delta t} = - \sum_{i \neq j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = - \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}(t)$$

Apêndice B – Prova da equação de Chapman-Kolmogorov

$$\frac{dp_{ij}(t, s)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, s + \Delta t) - p_{ij}(t, s)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sum_k p_{ik}(t, s) p_{kj}(s, s + \Delta t) - p_{ij}(t, s)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \left[p_{ij}(t, s) p_{jj}(s, s + \Delta t) + \right. \right.$$

$$\left. \sum_{k \neq j} p_{ik}(t, s) p_{kj}(s, s + \Delta t) - p_{ij}(t, s) \right] \Bigg\} =$$

$$p_{ij}(t, s) \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{jj}(s, s+\Delta t) - 1}{\Delta t} \right] + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t, s) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{kj}(s, s+\Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\frac{dp_{ij}(t, s)}{dt} = p_{ij}(t, s) \lambda_{jj}(s) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t, s) \lambda_{kj}(s) = \sum_k p_{ik}(t, s) \lambda_{kj}(s).$$

Matricialmente, tem-se, portanto, a equação final:

$$\frac{dP(t, s)}{dt} = P(t, s) \Lambda(s)$$

Apêndice C – Teoria da confiabilidade (*hazard rates functions e survival functions*)

A confiabilidade de um componente (ou sistema) na época t , $R(t)$, é definida como $R(t) = P(T > t)$, onde T é a duração da vida do componente. R é denominada função de confiabilidade ou *survival function*. Em relação à função densidade de probabilidade (*fdp*) de T , diga-se, f , tem-se $R(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds$. Em relação à função distribuição acumulada (*fda*) de T , diga-se, F , tem-se $R(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t)$. Em relação à modelagem de migrações ou do *default*, T seria a variável aleatória que indicaria o “tempo até a ocorrência de uma migração ou do *default*”. Logo, $R(t)$ seria a probabilidade de uma migração ou de o *default* ocorrer após um certo tempo t .

A taxa de falhas (*hazard rates function*) Z , algumas vezes chamada de função de risco, associada a uma variável aleatória T é dada por:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

A fim de interpretar $Z(t)$, considere-se a probabilidade condicionada $P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t)$, isto é, a probabilidade de que a peça venha a falhar durante as próximas Δt unidades de tempo, desde que a peça esteja funcionando adequadamente no instante t . Aplicando-se a definição de probabilidade condicionada, pode-se escrever a expressão anterior assim:

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} =$$

$$\frac{\left(\int_t^{t+\Delta t} f(x) dx \right)}{P(T > t)} = \frac{\Delta t f(\varepsilon)}{R(t)} \approx \frac{\Delta t f(t)}{R(t)}$$

onde:

$$t \leq \varepsilon \leq t + \Delta t.$$

A penúltima expressão é (para Δt pequeno e supondo-se que f seja contínua em $t > 0$) aproximadamente igual a $\Delta t Z(t)$. Portanto, explicando não formalmente, $\Delta t Z(t)$ representa a proporção de peças que falharão entre t e $t + \Delta t$, entre aquelas peças que estavam ainda funcionando na época t . Do que se explicou anteriormente, conclui-se que f , a fdp de T , determina univocamente a taxa de falhas Z . Em relação ao *default*, $\Delta t Z(t)$ seria a proporção de empréstimos ou contrapartes que inadimpliram em $t + \Delta t$, entre aqueles que estavam adimplentes em t . Em relação às migrações em geral, $\Delta t Z(t)$ seria a proporção de empréstimos ou contrapartes que migraram de um estado i para o estado j em $t + \Delta t$, entre aqueles que estavam no estado i em t . Mostra-se agora que a recíproca também vale: a taxa de falhas Z determina univocamente a fdp f .

Teorema: Se T , a duração até falhar, for uma variável aleatória contínua, com *pdf* f e se $F(0) = 0$, onde F é a *fda* de T , então, f poderá ser expressa em relação à taxa de falhas Z da seguinte maneira:

$$f(t) = Z(t) \exp\left(-\int_0^t Z(s) ds\right)$$

Demonstração: Visto que $R(t) = 1 - F(t)$, tem-se $R'(t) = -F'(t) = -f(t)$. Daí,

$$Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)} \therefore \frac{-dR(t)}{R(t)dt} = Z(t) \therefore \frac{dR(t)}{R(t)} = -Z(t)dt \therefore \int_0^t \frac{dR(t)}{R(t)} = -\int_0^t Z(s)ds \therefore$$

$$\ln\left(\frac{R(t)}{R(0)}\right) = -\int_0^t Z(s)ds \therefore R(t) = R(0) \exp\left(-\int_0^t Z(s)ds\right).$$
 Como $F(0) = 0$, segue que $R(0) = 1$. Logo, $R(t) = \exp\left(-\int_0^t Z(s)ds\right)$. Como $Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$, tem-se que $f(t) = Z(t) \exp\left(-\int_0^t Z(s)ds\right)$.

É sabido que o tempo de permanência no *rating* i segue uma distribuição exponencial por causa da hipótese markoviana da falta de memória (NORRIS, 1998). Isso significa que, para cada *rating* i , existe uma taxa λ_{ii} tal que a contraparte, uma vez que migra para o *rating* i , permanece nele por um tempo T_i com distribuição exponencial de parâmetro λ_{ii} . Assim, $R(t) = P(T_i > t) = 1 - P(T_i \leq t) = 1 - P(T_i \leq t) = 1 - (1 - \exp(-\lambda_{ii}t)) = \exp(-\lambda_{ii}t)$. Assim, $P(T_i > t+s | T_i > s) = \frac{P(T_i > t+s, T_i > s)}{P(T_i > s)} = \frac{P(T_i > t+s)}{P(T_i > s)} = \frac{\exp(-\lambda_{ii}(t+s))}{\exp(-\lambda_{ii}s)} = \exp(-\lambda_{ii}t)$. Aqui se demonstra a propriedade da falta de memória da distribuição exponencial, mostrando a ligação com a propriedade markoviana de independência do tempo de permanência no *rating* i em relação aos *ratings* passados. No Apêndice A, provou-se a relação entre λ_{ii} e λ_{ij} , onde λ_{ii} seria a taxa de permanência no *rating* i e λ_{ij} seria a taxa de migração do *rating* i para o *rating* j .

Concluindo, tem-se mais uma alternativa para a modelagem de todo o processo de *default* ou de migrações entre os *ratings*, bastando seguir a metodologia de apuração das *hazard rates* e *survival functions* descrita.

Apêndice D – Autovalores e autovetores

Definição 1 (autovetor e autovalor): Seja A um operador linear em um espaço vetorial V sobre um corpo F . Um vetor $v \neq 0$ é um autovetor de A se, e somente se, existe um escalar $\lambda \in F$ tal que $Av = \lambda v$. O escalar λ é um autovalor de A , associado ao autovetor v . O conjunto dos autovalores de um operador é seu espectro. Em outras palavras, dada a transformação linear A , deseja-se saber se existe um vetor v tal que a aplicação Av preserve a direção de v .

Lema: Seja A um operador com autovetores v_1, v_2, \dots, v_k e autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Se os autovalores λ_i são distintos, então, os autovetores são linearmente independentes.

Definição 2 (subespaço próprio): Sejam V um espaço vetorial, T um operador linear em V e λ um autovalor de T . Então os autovetores relacionados a λ formam um subespaço, chamado de espaço próprio (ou autoespaço) de V .

Definição 3 (multiplicidade geométrica de autovalor): A multiplicidade geométrica de um autovalor λ é a dimensão de seu espaço próprio.

Teorema 1: Seja A com autovetor v e autovalor associado λ . Então v e λ^{-1} são autovetor e autovalor de A^{-1} .

Demonstração: Se $Av = \lambda v$, então:

$$Av = \lambda v$$

$$v = A^{-1}(\lambda v)$$

$$v = \lambda A^{-1}v$$

$$\lambda^{-1}v = A^{-1}v.$$

Portanto, v é autovetor de A^{-1} com autovalor λ^{-1} .

Proposição: Se A não é singular, os autovalores de A e A^T são os mesmos.

Definição 4 (polinômio característico): Seja A um operador em R^n (ou uma matriz quadrada de ordem n), com elementos de um corpo E . O polinômio característico de A é

$$\det(xI - A).$$

As raízes do polinômio característico de uma matriz A são os autovalores da transformação representada por A .

Definição 5 (multiplicidade algébrica de autovalor): A multiplicidade algébrica do autovalor λ é sua multiplicidade como raiz do polinômio característico de A .

Método de determinação de autovalores e autovetores: Para determinar os autovalores e autovetores de uma matriz A , primeiro obtém-se o polinômio característico de A . As raízes desse polinômio são os autovalores de A . Depois, resolve-se $Av = \lambda v$, para todos os autovalores λ , obtendo-se assim os autovetores de A .

Teorema 2: Se duas matrizes quadradas de ordem n com elementos de um mesmo corpo são similares, então, elas têm o mesmo polinômio característico.

Demonstração: Se A e B são similares, então, existe P tal que $B = P^{-1}AP$. Assim:

$$\begin{aligned}
 \det(xI - B) &= \det(xI - P^{-1}AP) \\
 &= \det(xIP^{-1}P - P^{-1}AP) \\
 &= \det(P^{-1}xIP - P^{-1}AP) \\
 &= \det(P^{-1}(xI - A)P) \\
 &= \det(P^{-1}) \det(xI - A) \det(P) \\
 &= \det(xI - A).
 \end{aligned}$$

Teorema 3: Os valores na diagonal de uma matriz triangular são seus autovalores.

Demonstração: Basta resolver $\det(xI - A) = 0$ para uma matriz triangular A .

Teorema 4 (de Cayley-Hamilton): Seja A uma matriz e p seu polinômio característico. Então, $p(A) = 0$.

Demonstração: Basta calcular o polinômio característico em função de x e, depois, substituir x pela matriz A .

Corolário: Toda matriz real simétrica tem autovalores reais.

Definição 6 (matriz diagonalizável): Uma matriz quadrada A é diagonalizável se é similar a uma matriz diagonal; ou seja, se existe P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

Teorema 5: Uma matriz quadrada de ordem n é diagonalizável se, e somente se, tem n autovetores linearmente independentes. Em outras palavras, A é diagonalizável se, e somente se, o espaço V tem uma base formada por autovetores de A .

Demonstração: Se A é diagonalizável, então, existe P tal que $D = P^{-1}AP$ é diagonal:

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Então $AP = PD$. Sejam p^1, \dots, p^n as colunas de P . Mas:

$$AP = (Ap^1 \ Ap^2 \ \dots \ Ap^n)$$

$$PD = (\lambda_1 p^1 \ \lambda_2 p^2 \ \dots \ \lambda_n p^n).$$

Conclui-se que:

- 1) $AP = PD$ implica $Ap^i = \lambda_i p^i$ e
- 2) Como P tem inversa, suas colunas são não nulas e LI.

Ou seja, as colunas de P são autovetores de A e são LI.

Sejam p^1, \dots, p^n autovetores LI de A . Construa-se $P = (p^1 \ p^2 \ \dots \ p^n)$. Então, para cada coluna p^i , Ap^i é a multiplicação de A por um de seus autovetores, que sabe-se ser igual a $\lambda_i p^i$. Assim, $AP = PD$, onde D é a matriz diagonal com os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Como as colunas de P são LI, P tem inversa, e pode-se multiplicar “ $AP = PD$ ” à esquerda por P^{-1} , obtendo $D = P^{-1}AP$.

Teorema 6: Seja A uma matriz $n \times n$. Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de A . Suponha que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ são autovetores linearmente independentes associados a λ_1 e $\{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ são autovetores linearmente independentes associados a λ_2 . Então, o conjunto

$\{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_l\}$ é linearmente independente. O mesmo resultado vale para qualquer número de autovalores distintos de A .

Demonstração: Suponha-se que existam escalares $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l$ tais que:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k + y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_l w_l = 0 \quad (1)$$

Multiplicando ambos os lados por A e usando o fato de que $Av_j = \lambda_1 v_j$ e $Aw_j = \lambda_2 w_j$, segue que:

$$x_1 \lambda_1 v_1 + x_2 \lambda_1 v_2 + \dots + x_k \lambda_1 v_k + y_1 \lambda_2 w_1 + y_2 \lambda_2 w_2 + \dots + y_l \lambda_2 w_l = 0 \quad (2)$$

Por outro lado, multiplicando-se a equação (1) por λ_2 , tem-se:

$$x_1 \lambda_2 v_1 + x_2 \lambda_2 v_2 + \dots + x_k \lambda_2 v_k + y_1 \lambda_2 w_1 + y_2 \lambda_2 w_2 + \dots + y_l \lambda_2 w_l = 0 \quad (3)$$

Agora, fazendo (3)-(2), obtém-se:

$$x_1 (\lambda_2 - \lambda_1) v_1 + x_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \dots + x_k (\lambda_2 - \lambda_1) v_k = 0$$

Como os vetores v_1, v_2, \dots, v_k são linearmente independentes e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, conclui-se que $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$. Analogamente, multiplicando a equação (1) por λ_1 e subtraindo da equação (2), conclui-se que $y_1 = y_2 = \dots = y_l = 0$.

Corolário: Se uma matriz $n \times n$ tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável.

Apêndice E – Probabilidades de transição acumuladas por faixa de risco (%)

Rating	AA até default	AA- até default	A+ até default	A até default	A- até default
AAA	4,530	2,010	0,860	0,300	0,100
AA+	13,770	5,220	1,950	0,740	0,260
AA		20,750	11,580	4,990	1,980
AA-			18,660	11,700	6,600
A+				13,351	7,561
A					22,402
A-					
BBB+					
BBB					
BBB-					
BB+					
BB					
BB-					
B+					
B					
B-					
CCC+					
CCC					
CCC-					
CC					
C					
D					
E					
F					
Default					

(continua)

(continuação)

Rating	BBB+ até default	BBB até default	BBB- até default	BB+ até default	BB até default	BB- até default
AAA	0,050	0,020	0,010	0,000	0,000	0,000
AA+	0,120	0,050	0,020	0,010	0,000	0,000
AA	0,870	0,350	0,160	0,070	0,030	0,010
AA-	3,270	1,640	0,700	0,270	0,130	0,060
A+	4,151	2,131	1,041	0,531	0,211	0,111
A	14,862	8,112	3,992	1,962	0,922	0,442
A-	15,792	8,602	4,212	2,122	0,992	0,482
BBB+		22,379	12,999	6,689	3,309	1,639
BBB			29,934	21,044	12,494	6,904
BBB-				26,725	17,955	10,805
BB+					32,346	24,386
BB						30,962
BB-						
B+						
B						
B-						
CCC+						
CCC						
CCC-						
CC						
C						
D						
E						
F						
Default						

(continua)

(continuação)

Rating	B+ até default	B até default	B- até default	CCC+ até default	CCC até default	CCC- até default
AAA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA+	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA-	0,030	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000
A+	0,061	0,031	0,011	0,001	0,001	0,001
A	0,242	0,132	0,072	0,042	0,022	0,012
A-	0,262	0,152	0,082	0,042	0,022	0,012
BBB+	0,879	0,519	0,299	0,179	0,109	0,069
BBB	3,634	2,124	1,244	0,784	0,504	0,324
BBB-	6,295	3,665	2,185	1,345	0,905	0,605
BB+	16,636	10,946	6,916	4,516	3,006	2,026
BB	22,602	15,722	10,382	6,752	4,522	3,062
BB-	29,263	22,023	15,683	10,923	7,633	5,223
B+		35,962	28,322	21,302	15,442	11,192
B			39,860	32,550	25,300	18,970
B-				41,411	34,151	26,891
CCC+					45,810	38,620
CCC						44,618
CCC-						
CC						
C						
D						
E						
F						
Default						

(continua)

(continuação)

Rating	CC	C	D	E	F	Default
	<i>até default</i>	<i>até default</i>	<i>até default</i>	<i>até default</i>	<i>até default</i>	<i>até default</i>
AAA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA+	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AA-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
A+	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
A	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
A-	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
BBB+	0,039	0,029	0,019	0,009	0,009	0,009
BBB	0,214	0,144	0,104	0,074	0,054	0,044
BBB-	0,405	0,285	0,205	0,155	0,115	0,085
BB+	1,386	1,006	0,726	0,526	0,386	0,286
BB	2,132	1,522	1,102	0,792	0,582	0,422
BB-	3,613	2,553	1,813	1,303	0,933	0,643
B+	8,012	6,072	4,612	3,542	2,822	2,252
B	13,860	10,270	7,610	5,700	4,350	3,280
B-	20,521	15,421	11,321	8,251	6,071	4,371
CCC+	31,120	24,060	18,130	12,860	8,980	5,940
CCC	37,108	29,918	22,868	16,418	11,378	7,248
CCC-	40,361	33,251	26,301	19,321	13,591	8,641
CC		39,130	31,960	24,440	17,680	10,750
C			34,804	27,054	20,134	12,934
D				29,326	21,706	14,716
E					25,716	17,076
F						17,850
Default						

Fonte: Elaboração própria.